C01 | Classification des groupes abéliens finis | L102 L108 L104 L110 L107 L142

Lemme 1 : Soit G un groupe abélien fini, d'exposant $N \in \mathbb{N}^*$, alors $N := \operatorname{ppcm}_{g \in G} o(g) = \max_{g \in G} o(g)$. En particulier, $\exists x \in G, o(x) = N$.

Démonstration : ① Montrons que si G contient des éléments d'ordre a et $b \in \mathbb{N}^*$, alors il contient un élément d'ordre $\operatorname{ppcm}(a,b)$.

Soient $P_1 = \{p \in \mathbb{P} : v_p(a) > 0 \text{ et } v_p(a) \geqslant v_p(b)\}$

et $P_2 = \{p \in \mathbb{P} : v_p(b) > 0 \text{ et } v_p(a) < v_p(b)\}$

On a : $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, ainsi $\alpha = \prod_{p \in P_1} p^{v_p(a)}$ et $\beta = \prod_{p \in P_2} p^{v_p(b)}$ st 1^ers^ entre eux.

De plus, $\forall p \in \mathbb{P}$, $v_p(\alpha\beta) = \begin{cases} v_p(a) & \text{si } v_p(a) \geqslant v_p(b) \\ v_p(b) & \text{si } v_p(a) < v_p(b) \end{cases} = \max(v_p(a), v_p(b))$

donc $\alpha\beta = \operatorname{ppcm}(a,b)$.

Soient maintenant $x \in G$ d'ordre a et $y \in G$ d'ordre b.

Comme $\alpha \mid a$, on introduit $x' = x^{\frac{a}{\alpha}}$ est d'ordre α.

De m̂, $\beta \mid b$, on introduit $y' = y^{b/\beta}$ d'ordre β.

Or x' et y' commutent car G est abélien, d'où $o(x'y') = o(x').o(y') = \alpha\beta = \operatorname{ppcm}(a,b)$

ainsi G contient un élément d'ordre $\operatorname{ppcm}(a,b)$.

② Par récurrence finie, G contient un élément d'ordre : $\operatorname{ppcm}_{g \in G} o(g)$.

Autrement, soit $x \in G$ d'ordre a et $y \in G$ d'ordre $M = \max_{x \in G} o(g)$.

D'après le premier point, G contient un élément d'ordre $\operatorname{ppcm}(a,M)$

Par déf du max, $\operatorname{ppcm}(a,M) \leqslant M$ et par l'arithmétique, $\operatorname{ppcm}(a,M) \geqslant M$

d'où $\operatorname{ppcm}(a,M) = M$, puis $a \mid M$. D'où $\forall x \in G, x^M = 1$ puis $N \mid M$ puis $N = M$.

Lemme 2 : Soit G un groupe abélien, alors G et $\hat{G}$ ont le même exposant.

Démonstration : on note N l'exposant de G et $\hat{N}$ l'exposant de $\hat{G}$.

alors $\forall \chi \in \hat{G}, \forall x \in G, \chi^N(x) = \chi(x)^N = \chi(x^N) = \chi(1) = 1$ donc $\chi^N = 1$

Ainsi $\hat{N} \mid N$. En appliquant le résultat à $\hat{\hat{G}}$, on a $\hat{\hat{N}} \mid \hat{N}$.

Or $G \simeq \hat{\hat{G}}$ d'où en particulier, $\hat{\hat{N}} = N$. On en déduit $N = \hat{N}$.

Th de structure des groupes abéliens finis :

Soit G un groupe abélien fini, alors $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}^*$

tq : • $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $n_{i+1} \mid n_i$.

• $G \simeq \mathbb{Z}/_{n_1\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n_2\mathbb{Z}} \times \dots \times \mathbb{Z}/_{n_r\mathbb{Z}}$.

Démonstration : Montrons l'existence par récurrence forte sur $n = |G| \in \mathbb{N}^*$.

- Si $|G| = 1$, alors $G \simeq \{1\}$, dans ce cas, $r = 1, n_1 = 1$ conviennent.
- Supposons le résultat établi pour un groupe de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$

Soit G un groupe de cardinal $n+1$.

Soit $n_1 \in \mathbb{N}^*$ l'exposant de G.

D'après le lemme 2, n_1 est aussi l'exposant de $\hat{G}$.

D'après le lemme 1, soit $\chi_1 \in \hat{G}$ dont l'ordre est n_1.

Son image $\chi_1(G)$ est un sous groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n_1 donc $\mathbb{U}_{n_1}$.

En particulier, $\exists x_1 \in G$ tq $\chi_1(x_1) = e^{\frac{2i\pi}{n_1}}$.

On a : $o(x_1) = n_1$ donc $H = \langle x_1 \rangle$ est un s/g gpe cyclique d'ordre n_1 de G.

Mq : $G \simeq H \times \mathrm{Ker}(\chi_1)$.

* On a $\chi_1|_H : H \to \mathbb{U}_{n_1}$ surjective, et $|H| = n_1$ donc $\chi_1|_H$ bijective de injective

Par suite, $\mathrm{Ker}(\chi_1|_H) = H \cap \mathrm{Ker}(\chi_1) = 1$. (Au passage, $\chi_1(G) = \chi_1(H)$).

* Soit $g \in G$, $\exists h \in H$ tq $\chi_1(g) = \chi_1(h)$ donc $gh^{-1} \in \mathrm{Ker}(\chi_1)$

D'où $g \in h.\mathrm{Ker}(\chi_1)$ puis $G = H.\mathrm{Ker}(\chi_1)$.

H est cyclique d'ordre n_1 donc $H \simeq \mathbb{Z}/_{n_1\mathbb{Z}}$.

$\mathrm{Ker}(\chi_1)$ est un groupe de cardinal $d \leq n$, d'après l'HR,

$\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall i \in [\![2, r-1]\!]$, $n_{i+1} \mid n_i$ et $\mathrm{Ker}(\chi_1) \simeq \mathbb{Z}/_{n_2\mathbb{Z}} \times \dots \times \mathbb{Z}/_{n_r\mathbb{Z}}$

n_2 est alors l'exposant de $\mathrm{Ker}(\chi_1) < G$, d'exposant n_1 donc $n_2 \mid n_1$

Ainsi, $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $n_{i+1} \mid n_i$

et $G \simeq \mathbb{Z}/_{n_1\mathbb{Z}} \times \dots \times \mathbb{Z}/_{n_r\mathbb{Z}}$

Récurrence établie.